Université Mohammed 6 Polytechnique
Education Fellow UM6P - Année 2022/2023
Modélisation et Méthodes Numériques
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/Agreg-UM6P.html`

TD n^{o}3 : *méthodes directes de résolution de systèmes linéaires: factorisation*

Exercice 1.

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$ admet une décomposition LU que l'on déterminera.

Exercice 2. Soit A une matrice carrée $n \times n$ dont toutes les sous-matrices diagonales sont inversibles.

1. Montrer qu'il existe
   - une matrice triangulaire inférieure L à diagonale unité (*i.e.* $L_{i,i} = 1$),
   - une matrice triangulaire supérieure S à diagonale unité,
   - une matrice diagonale D

   telles que
   $$A = LDS. \tag{1}$$
2. Montrer que cette décomposition est unique.
3. Montrer que si A est symétrique, la décomposition (1) devient :
   $$A = LDL^T.$$
4. Retrouver la décomposition de Cholesky dans le cas où la matrice A est symétrique définie positive.

5. Montrer que si la matrice A est symétrique mais pas définie positive, on peut factoriser A sous la forme

$$A = B\tilde{B}^T,$$

où B est une matrice triangulaire inférieure et $\tilde{B}$ une matrice dont chaque colonne est soit égale à la colonne correspondante de B, soit égale à cette colonne changée de signe.

6. Appliquer cette factorisation à

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.

Le but de l'exercice est de montrer que si A a une structure bande c'est-à-dire si il existe $p \in \{0, .., n-1\}$ tel que $A_{i,j} = 0$ pour tout i, j tel que $|i - j| > p$ alors il en est de même pour L et U.

Remarque: A est nulle en dehors des $2p + 1$ diagonales centrales et A a la forme suivante:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,p+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{p+1,1} & & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & & \ddots & & a_{n-p,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-p,n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

On fixe l'indice k tel que $k \geq p + 2$, alors A vérifie A_{kj} et A_{jk} sont nuls pour j compris entre 1 et $k - (p + 1)$.

1. Montrer par récurrence sur j que sur la $k^{\text{ième}}$ ligne de L, on a : $L_{kj} = 0$ pour $1 \leq j \leq k - (p + 1)$.

2. Montrer par récurrence sur j que sur la $k^{\text{ième}}$ colonne de U, on a $U_{jk} = 0$ pour $1 \leq j \leq k - (p+1)$.

Exercice 4. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 12 & 2 & 49 & -4 \\ -6 & 1 & -4 & 51 \end{pmatrix}$ admet une décomposition de Cholesky que l'on déterminera.

Exercice 5.

Soit $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On note $H(v) \in$ la matrice (dite de Householder)

$$H(v) = I_n - \frac{2}{||v||^2} v^t v$$

et $\mathcal{H}$ l'ensemble de telles matrices complété par la matrice I_n.

1. Montrer que $H(v) \in O_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$ (matrices orthogonales et symétriques).

2. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ tel que $||x|| = ||y||$. Montrer qu'il existe $H \in \mathcal{H}$ tel que $Hx = y$.

3. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ produit d'au plus $(n-1)$ matrices de $\mathcal{H}$ tel que $PA = R$ soit triangulaire supérieure à diagonale strictement positive. Préciser la construction de P et R.

4. Proposer un algorithme basé sur les matrices de Householder donnant une factorisation $A = QR$, avec Q matrice orthogonale et R matrice triangulaire, en $\frac{4}{3}n^3 + O(n^2)$ opérations élémentaires (additions, multiplications, divisions ou racines carrées).