

(public 2013)

**Résumé :** On s'intéresse au comportement asymptotique d'une famille de solutions d'équations différentielles dont les coefficients oscillent rapidement.

**Mots clefs :** Equations aux dérivées partielles. Problème aux limites. Analyse asymptotique.

---

- *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.*

On s'intéresse aux solutions d'équations différentielles du type

$$(1) \quad -\frac{d}{dx} \left( a(x) \frac{d}{dx} u(x) \right) = f(x), \quad x \in ]0, 1[$$

avec les conditions aux limites

$$(2) \quad u(0) = 0 = u(1),$$

le coefficient  $a$  et le second membre  $f$  étant des fonctions données définies sur  $]0, 1[$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Précisément, on étudie le comportement de la solution  $u$  lorsque le coefficient  $a$  présente des variations rapides.

## 1. Préliminaires

Le problème (1)-(2) peut être vu comme un modèle simple de transfert de chaleur décrivant l'évolution de la température  $u$  dans un matériau conducteur soumis à une source de chaleur  $f$ . Les propriétés thermiques du matériau sont contenues dans le coefficient  $a(x)$ . En effet, considérons un fil de section  $S$  et de longueur 1 soumis à une source de chaleur  $f$ . En supposant que la température reste constante dans les sections, on réduit le problème à une situation mono-dimensionnelle, décrite par la variable  $x \in ]0, 1[$ . En régime stationnaire, les variations spatiales du flux de chaleur  $q$  équilibrent la source et on a donc pour  $0 < dx \ll 1$

$$\int_x^{x+dx} f(y) S dy = S(q(x+dx) - q(x)).$$

Or, la loi de Fourier, de nature phénoménologique, relie le flux de chaleur aux variations de température en postulant que  $q(x) = -a(x) \frac{d}{dx} u(x)$ ,  $a(x) > 0$  étant le coefficient de conductivité thermique. On obtient ainsi l'équation (1) alors que (2) signifie que les extrémités du fil sont maintenues à une température nulle.

Lorsque le phénomène a lieu dans un matériau composite ce coefficient peut présenter de fortes variations avec une échelle très petite. On décrit ceci en supposant que les coefficients de (1) sont donnés par les éléments d'une suite

$$(3) \quad a_n(x) = \alpha(nx),$$

où la fonction  $\alpha$  est 1-périodique. On va analyser le comportement des solutions lorsque  $n \rightarrow \infty$ , c'est-à-dire lorsque la période d'oscillations des coefficients diminue.

On suppose que

$$a, f \in C^0([0, 1]), \quad 0 < a_* \leq a(x) \leq a^* < \infty.$$

On peut obtenir la formule suivante qui exprime la solution de (1)-(2) en fonction des données  $f$  et  $a$  :

$$(4) \quad u(x) = \int_0^x \frac{1}{a(y)} \left( C - \int_0^y f(z) dz \right) dy, \quad C = \int_0^1 \frac{1}{a(y)} \left( \int_0^y f(z) dz \right) dy / \int_0^1 \frac{1}{a(y)} dy.$$

Pour des fonctions  $a, f$  quelconques une telle formule ne précise pas beaucoup plus la solution que l'équation (1)-(2) ce qui motive donc de chercher des approximations numériques. Néanmoins, (4) contient un certain nombre d'informations utiles.

## 2. Homogénéisation

On déduit de (4) le

**Théorème 1.** *La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de solutions de (1)-(2) associée aux coefficients (3) avec l'hypothèse  $0 < a_* \leq \alpha(x) \leq a^* < \infty$  est telle que  $u_n(x)$  et  $u'_n(x) = \frac{d}{dx}u_n(x)$  sont bornées uniformément en  $x \in [0, 1]$  et  $n \in \mathbb{N}$  par des constantes ne dépendant que de  $a_*, a^*$  et  $\sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ .*

Grâce au théorème d'Arzela-Ascoli on peut donc extraire une sous-suite  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  qui converge uniformément vers  $u$  sur  $[0, 1]$ . On se demande quelle est l'équation satisfaite par la limite  $u(x)$ . Naïvement on pourrait croire que  $u$  vérifie (1)-(2) avec pour coefficient (constant) la moyenne  $\int_0^1 \alpha(y) dy$ , raisonnement qui pourrait être conforté par le

**Théorème 2.** *Soit une suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $b_n(x) = \beta(nx)$  où  $\beta$  est une fonction 1-périodique. On note  $\bar{\beta} = \int_0^1 \beta(y) dy$  sa moyenne. Alors pour tout  $\varphi \in C_c^0(]0, 1[)$  on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 b_n(x) \varphi(x) dx = \int_0^1 \bar{\beta} \varphi(x) dx.$$

On dit que la suite  $b_n$  converge faiblement vers  $\bar{\beta}$ .

Toute la difficulté consiste à passer à la limite dans le produit  $a_n(x)u'_n(x)$  ; en effet l'énoncé

**Théorème 3.** *Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de fonctions continues, uniformément bornées. Si  $v_n$  converge faiblement vers  $v$  et  $w_n$  converge uniformément vers  $w$  alors  $v_n w_n$  converge faiblement vers  $vw$ .*

ne s'applique pas directement puisque a priori aucune des deux suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ou  $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge uniformément. On sait seulement que

**Théorème 4.** Soit  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de classe  $C^1$  qui converge uniformément vers une fonction  $w$  de classe  $C^1$ . Alors la suite  $(w'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers  $w'$ .

L'idée consiste à introduire la suite  $w_n(x) = a_n(x)u'_n(x)$  : l'équation (1) assure qu'elle satisfait au critère du théorème d'Arzela-Ascoli et on peut donc supposer qu'il existe une sous-suite notée  $(w_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  qui converge uniformément vers  $w$  sur  $[0, 1]$ . On en déduit que

$$u'_{n_k}(x) = \frac{1}{a_{n_k}(x)} w_{n_k}(x) \text{ converge faiblement vers } \int_0^1 \frac{dy}{\alpha(y)} w(x).$$

On pose alors

$$u(x) = \int_0^x \left( \int_0^1 \frac{dy}{\alpha(y)} w(z) \right) dz$$

et en passant (faiblement) à la limite  $k \rightarrow \infty$  dans (1) on obtient donc

$$-w'(x) = f(x) = -\frac{d}{dx} \left( a_{\text{eff}} \frac{d}{dx} u(x) \right), \quad a_{\text{eff}} = \left( \int_0^1 \frac{dy}{\alpha(y)} \right)^{-1}$$

### 3. Approximation numérique

#### 3.1. Eléments finis

La méthode numérique qu'on propose exploite la relation

$$(5) \quad \int_0^1 a(x) \frac{d}{dx} u(x) \frac{d}{dx} \varphi(x) dx = \int_0^1 f(x) \varphi(x) dx$$

obtenue pour tout  $\varphi \in C^1([0, 1])$  telle que  $\varphi(0) = 0 = \varphi(1)$  en multipliant (1)-(2) par  $\varphi$  puis en intégrant par parties. On introduit une subdivision de  $[0, 1]$

$$x_0 = 0 < x_1 = 1/N < \dots < x_i = i/N < \dots < x_N = 1.$$

Le paramètre  $N \in \mathbb{N}$  (ou  $h = 1/N > 0$ ) est destiné à évaluer la qualité de l'approximation numérique qu'on met en oeuvre. On définit l'espace d'approximation

$$V^{(N)} = \{ \varphi \in C^0([0, 1]), \quad \varphi(0) = 0 = \varphi(1), \quad \varphi|_{I_j} \in \mathbb{P}_1 \}$$

où  $I_j = [j/N, (j+1)/N]$  et  $\mathbb{P}_1$  désigne l'ensemble des polynômes de degré  $\leq 1$ . On vérifie que  $V^{(N)}$  est un espace vectoriel de dimension  $N - 1$  engendré par les fonctions

$$\varphi_j = \begin{cases} -Nx + (1 + j) & \text{si } x \in I_j, \\ Nx + (1 - j) & \text{si } x \in I_{j-1} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

avec  $j \in \{1, \dots, N-1\}$ . On note que (5) est encore satisfaite par les  $\varphi_j$  et l'idée est de chercher une approximation de la solution de (1) de la forme  $\sum_{j=1}^{N-1} u_j \varphi_j(x) \in V^{(N)}$ .

On définit  $u^{(N)}$  en imposant que

$$(6) \quad \int_0^1 a(x) \frac{d}{dx} u^{(N)}(x) \frac{d}{dx} \varphi_j(x) dx = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx$$

soit satisfait pour tout  $j \in \{1, \dots, N-1\}$ , ce qui revient à dire d'une part que le vecteur  $U^{(N)} = (u_1, \dots, u_{N-1})$  est solution du système linéaire

$$A^{(N)} U^{(N)} = F^{(N)}, \quad A_{ij}^{(N)} = \int_0^1 a(x) \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) dx, \quad F_i^{(N)} = \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx.$$

et d'autre part que  $u^{(N)}$  n'est autre que la projection de  $u$  sur  $V^{(N)}$  pour le produit scalaire  $\langle u, v \rangle = \int_0^1 a(x) \frac{d}{dx} u(x) \frac{d}{dx} v(x) dx$ . La validité de cette approche repose alors sur le

**Théorème 5.** Soit  $g \in C^2([0, 1])$  vérifiant  $g(0) = 0 = g(1)$ . On pose  $\tilde{g}^{(N)}(x) = \sum_{i=1}^{N-1} g(ih) \varphi_i(x)$ . Alors, il existe  $C > 0$  telle que

$$\sup_{x \in [0, 1]} |\tilde{g}^{(N)}(x) - g(x)| \leq C/N^2, \quad \sup_{x \in [0, 1]} \left| \frac{d}{dx} \tilde{g}^{(N)}(x) - \frac{d}{dx} g(x) \right| \leq C/N.$$

On peut donc espérer une convergence d'ordre  $1/N$  c'est-à-dire montrer qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que l'erreur entre la solution approchée  $u^{(N)}$  et la solution  $u$  de (1)-(2) vérifie

$$\|u^{(N)} - u\|_{L^\infty} \leq \|u^{(N)'} - u'\|_{L^2} \leq C/N.$$

### 3.2. Résonnance

La mise en oeuvre de la méthode requiert donc le calcul des coefficients de la matrice  $A^{(N)}$ . On remarque que les fonctions  $\varphi_j$  et  $\varphi_k$  ont des supports disjoints dès que  $|j - k| > 1$  donc la matrice  $A^{(N)}$  est creuse. Par ailleurs, on a

$$\varphi_j'(x) \varphi_j'(x) = N^2 \mathbb{1}_{[(j-1)/N, (j+1)/N]}(x), \quad \varphi_j'(x) \varphi_{j+1}'(x) = -N^2 \mathbb{1}_{[j/N, (j+1)/N]}(x)$$

(où  $\mathbb{1}_B$  désigne la fonction caractéristique de l'ensemble  $B$ ). Il vient donc

$$A_{ij}^{(N)} = 0 \text{ si } |i - j| > 1, \quad A_{ii}^{(N)} = N^2 \int_{(i-1)/N}^{(i+1)/N} a(x) dx, \quad A_{i, i+1}^{(N)} = -N^2 \int_{i/N}^{(i+1)/N} a(x) dx.$$

La figure 1 illustre cette approche pour le cas  $a(x) = 1$ ,  $f(x) = 1$ . Dans le cas de coefficients rapidement variables, il peut se produire des phénomènes de résonnance entre l'échelle des oscillations et l'échelle de discrétisation qui conduisent à de mauvais résultats numériques. Ce phénomène est frappant lorsque les deux échelles coïncident c'est-à-dire lorsque la conductivité

thermique est donnée par (3) avec  $N = n$ . La matrice  $A^{(N)}$  est alors

$$A^{(N)} = \int_0^1 \alpha(y) dy \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots \\ \dots & & & & & \\ & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ & & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice correspond à l'approximation de (1)-(2) avec  $a(x) = \int_0^1 \alpha(y) dy$  dont on a justement vu qu'il n'était pas le problème décrivant la limite  $n \rightarrow \infty$ .

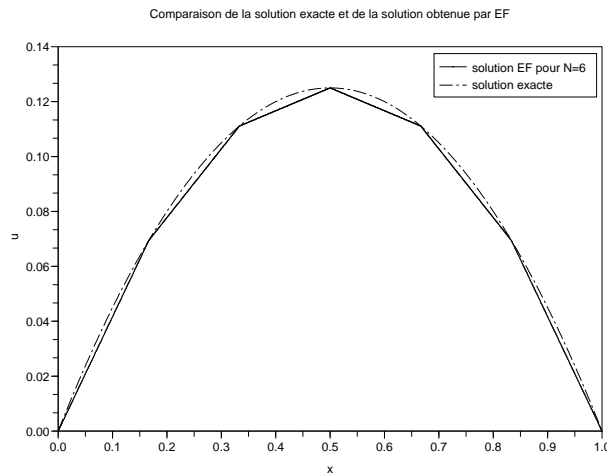


FIGURE 1

## Suggestions pour le développement

- *Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pouvez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre, et de façon plus ou moins fouillée. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées plus bas. Il est très vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats.*
  - Détailler l'analyse mathématique du problème asymptotique et donner les arguments prouvant les théorèmes utilisés dans le texte.
  - Montrer qu'on peut aussi considérer comme second membre les éléments d'une suite  $f_n(x)$  qui converge faiblement (par exemple  $f_n(x) = g(nx)$  avec  $g$  une fonction 1-périodique).
  - Généraliser le cadre fonctionnel en considérant des données  $f \in L^2(]0, 1[)$  et des coefficients non forcément continus.
  - Préciser les bases de la méthode numérique proposée et justifier les estimations d'erreur.

(public 2013) B : Calcul Scientifique

- Valider le schéma numérique ; on pourra notamment tester le schéma pour des coefficients constants par morceaux, par exemple  $a(x) = \mathbb{1}_{[0,1/2]} + 2\mathbb{1}_{]1/2,1]}$ .
- Illustrer le phénomène de résonance.
- Proposer d'autres méthodes numériques.