

(public 2010)

Résumé : On s'intéresse à des propriétés de fonctions propres pour approcher la solution d'une équation des ondes et au lien entre valeurs propres du Laplacien et caractéristiques géométriques d'un domaine

Mots clefs : Mécanique, équation des ondes, différences finies, recherche de valeurs propres

- *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.*

Quand on étudie les vibrations d'une structure mécanique (corde, membrane, etc.) certaines « oscillations » jouent un rôle important : on les appelle *vibrations (ou modes) propres*. Celles-ci ne dépendent que des caractéristiques de la structure et non des forces qui lui sont appliquées. Elles sont associées à des *fréquences propres*. L'objet de ce texte est double : il s'agit d'une part de montrer que les vibrations propres peuvent permettre de construire une méthode d'*approximation* et d'autre part que l'on peut extraire des renseignements sur la *géométrie* de la structure à partir de l'ensemble des fréquences propres.

1. Modes propres et équation des ondes

Commençons par un cas unidimensionnel : on considère une corde fixée entre deux points d'abscisses respectives 0 et $L > 0$, on note $\Omega =]0, L[$. On soumet la corde à une excitation de la forme $g(x) \cos(\omega t)$, où x désigne la variable d'espace, t le temps, $\omega > 0$ est un réel donné, et g est donné dans $L^2(\Omega)$ (l'espace des fonctions de carré intégrable). On note $v(x, t)$ le déplacement transverse de la corde au point $x \in \Omega$ et à l'instant t . On admet que la fonction $v(x, t)$ est solution de l'équation des ondes :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) = g(x) \cos(\omega t) & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \\ v(0, t) = v(L, t) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}_+^*, \\ v(x, 0) = \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

On admet qu'il existe une suite croissante de réels strictement positifs $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe une fonction non identiquement nulle u_k définie sur Ω , vérifiant :

$$(2) \quad \begin{cases} -u_k'' = \lambda_k u_k, & \text{sur } \Omega, \\ u_k = 0, & \text{en } x = 0 \text{ et } x = L. \end{cases}$$

Ici, u'' désigne la dérivée seconde en espace. Les fonctions u_k sont les *modes propres*, on les choisit telles que $\|u_k\|_{L^2(\Omega)} = 1$ (où $\|u\|_{L^2(\Omega)} = (\int_{\Omega} u^2 dx)^{1/2}$ est la norme hilbertienne usuelle sur $L^2(\Omega)$). Les λ_k sont appelés *valeurs propres*, et $\sqrt{\lambda_k}/(2\pi)$ sont les *fréquences propres*. On pose $\omega_k = \sqrt{\lambda_k}$ et on suppose que ω ne coïncide avec aucun ω_k . On admet que les $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ constituent une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ et on note $(g_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ les coefficients de la fonction g dans cette base, c'est-à-dire

$$g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} g_k u_k(x).$$

On cherche la solution de (1) sous la forme

$$(3) \quad v(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} y_k(t) u_k(x),$$

et on pose $v_K(x,t) = \sum_{k=1}^K y_k(t) u_k(x)$. On peut alors établir la proposition suivante :

Proposition 1. *On suppose qu'il existe un entier $m \geq 0$ tel que*

$$(4) \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^m |g_k|^2 < +\infty.$$

On a alors, pour K assez grand,

$$(5) \quad \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|v(\cdot, t) - v_K(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\lambda_{K+1}^{m/2+1}},$$

où C est une constante dépendant de g , ω et m , mais pas de K .

Ce résultat montre que v_K peut servir à approcher v . Plus précisément, l'étude de l'approximation de v par v_K passe par l'étude du comportement asymptotique de λ_K . Dans le cas présent, il est très simple de calculer explicitement λ_K et u_K . La Proposition 1 donne alors

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|v(\cdot, t) - v_K(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{K^{m+2}},$$

où C est une constante (différente de celle de la Proposition 1) dépendant entre autres de Ω .

2. Approximation par modes propres

Soient deux réels a et b tels que $0 < a < b < L$. On s'intéresse au cas où l'excitation est de la forme

$$f(x, t) = \mathbf{1}_{]a, b[}(x) \cos(\omega t),$$

où $\mathbf{1}_{]a, b[}(x) = 1$ si $x \in]a, b[$ et 0 sinon. On se propose d'approcher la solution de (1) de deux manières différentes.

On considère d'abord une méthode classique de différences finies. On se donne deux entiers $M > 0$ et $N > 0$ et on pose $\delta x = L/(N + 1)$, $\delta t = T/(M + 1)$, $x_i = i\delta x$, $i = 0, \dots, N + 1$, et $t_n = n\delta t$, $n = 0, \dots, M + 1$. On introduit une approximation v_i^n de $v(x_i, t_n)$, définie par le schéma,

$$\frac{v_i^{n+1} - 2v_i^n + v_i^{n-1}}{\delta t^2} - \frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{\delta x^2} = f(x_i, t_n),$$

pour $i = 1, \dots, N$, $n = 0, \dots, M$, avec $v_0^n = v_{N+1}^n = 0$ pour tout n , $v_i^0 = 0$ pour tout i et en convenant que $v_i^{-1} = 0$ pour tout i . À titre illustratif, on a représenté sur la Figure 1 la solution obtenue pour $L = 1$, $N = 35$, $M = 71$, $a = 0.7$, $b = 0.8$, $\omega = 3\pi/(2L)$ et $T = 3\pi/\omega$.

La deuxième méthode consiste à tronquer la série (3). On a représenté sur le graphique la solution obtenue avec $K = 3$ modes. Ces deux solutions approchées sont comparées à une solution de référence obtenue en conservant les 200 premiers modes.

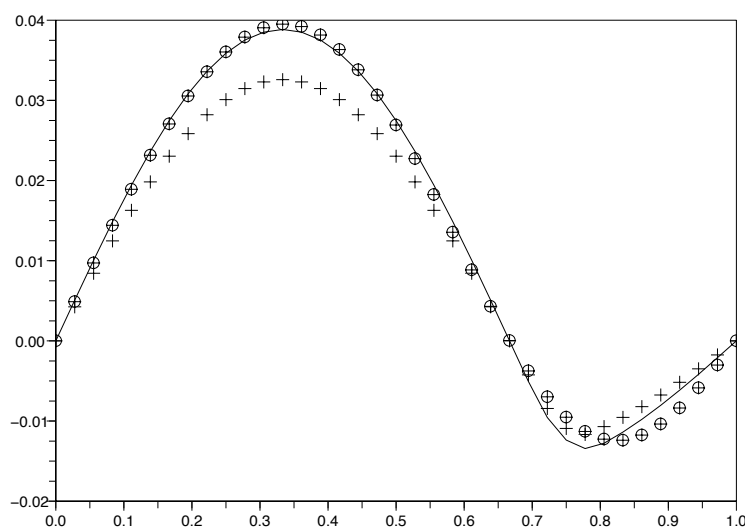


Figure 1 : Comparaison des approximations de $v(x, T)$ obtenues par différences finies (+) et par la méthode modale avec trois modes (⊕) avec une solution de référence en trait plein

3. Étude du spectre du moins-Laplacien

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d . On va s'intéresser ici au spectre de $-\Delta$, c'est-à-dire à l'ensemble des scalaires $\lambda_n > 0$ tels qu'il existe $0 \neq u_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $-\Delta u_n = \lambda_n u_n$ dans Ω et $u_n = 0$ sur $\partial\Omega$.

3.1. Formule de Weyl

La formule de Weyl permet de faire le lien entre le comportement de λ_K pour K grand et la géométrie de Ω . On introduit, pour $\lambda > 0$,

$$\mathcal{N}(\lambda) = \text{card} \{n \in \mathbb{N}, \lambda_n \leq \lambda\},$$

où « card » désigne le cardinal d'un ensemble.

La quantité $\mathcal{N}(\lambda)$ représente donc le nombre de valeurs propres de $-\Delta$ inférieures à λ (les valeurs propres multiples étant comptées avec leur multiplicité). La formule de Weyl donne le comportement suivant :

$$(6) \quad \mathcal{N}(\lambda) \sim \frac{\text{mes}(\Omega)\text{mes}(B_d)}{(2\pi)^d} \lambda^{d/2} \quad \text{quand } \lambda \rightarrow +\infty,$$

où B_d désigne la boule unité de \mathbb{R}^d , et mes désigne la mesure de Lebesgue d'un ensemble (longueur pour $d = 1$, surface pour $d = 2$, volume pour $d = 3$, etc.).

3.2. Le cas d'une membrane rectangulaire

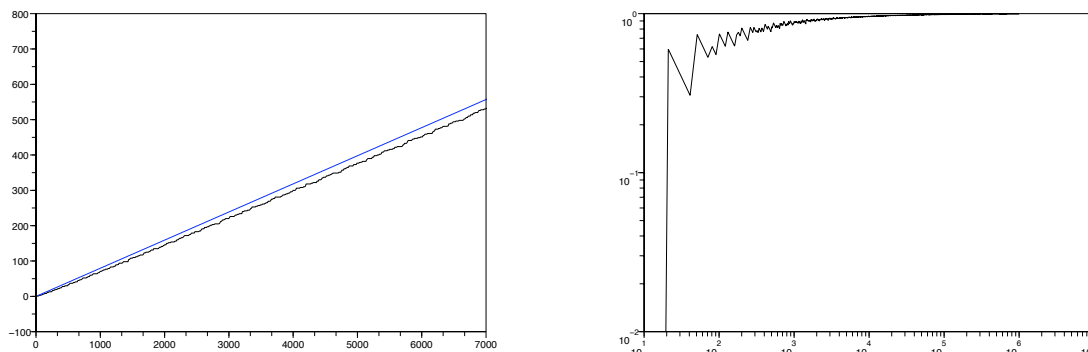
Soient $a, b > 0$. On considère le cas où $\Omega =]0, a[\times]0, b[$. En cherchant $u_n(x, y)$ sous la forme $l(x)m(y)$ où l et m sont des fonctions d'une seule variable, on trouve que les nombres $\lambda_{k_1, k_2} = \pi^2 \left(\frac{k_1^2}{a^2} + \frac{k_2^2}{b^2} \right)$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{N}^*$, sont des valeurs propres. On peut montrer que ce sont les seules.

Puisqu'on dispose dans ce cas d'une forme explicite des valeurs propres, on se propose de corroborer numériquement la formule de Weyl. Ici, on a donc :

$$(7) \quad \mathcal{N}(\lambda) = \text{card} \left\{ (k_1, k_2) \in (\mathbb{N}^*)^2, \frac{k_1^2}{a^2} + \frac{k_2^2}{b^2} \leq \frac{\lambda}{\pi^2} \right\}.$$

Cherchons d'abord un équivalent de $\mathcal{N}(\lambda)$ quand $\lambda \rightarrow \infty$. On peut se convaincre, au moins formellement, que si $\lambda \rightarrow +\infty$, $\mathcal{N}(\lambda)$ est équivalent au quart de la surface de l'ellipse d'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \right)^2$, ce qui redonne bien la formule de Weyl (6).

On peut également calculer numériquement la fonction \mathcal{N} pour un certain nombre de valeurs de λ et tracer quelques graphes. Les figures suivantes donnent par exemple les graphes comparés de \mathcal{N} et de son équivalent du membre de droite de la formule de Weil pour $\lambda \leq 7000$, ainsi qu'un graphe de leur quotient en échelle log-log pour des valeurs de λ prises de 10 en 10 et allant jusqu'à environ 10^6 , pour $a = b = 1$.



3.3. Approximation par différences finies

Le calcul précédent ne peut être effectué que dans le cas de géométries très particulières. Dans le cas général, on pourrait songer à utiliser une méthode numérique pour déterminer une approximation du spectre. Cette approche induit des difficultés que nous allons illustrer dans le cas d'école où $\Omega =]0, 1[$.

Ici aussi le spectre du moins-Laplacien est entièrement connu et on peut le comparer à ce que l'on obtient par une méthode de différences finies. On subdivise donc $[0, 1]$ en $N + 1$ intervalles identiques et l'on pose $h = 1/(N + 1)$. On définit $x_i = ih$ et on note u_i^h une approximation de u au point x_i . On cherche alors les couples $(u_i^h)_{i=1, \dots, N}$ et $\lambda_h > 0$ tels que

$$(8) \quad \frac{-u_{i-1}^h + 2u_i^h - u_{i+1}^h}{h^2} = \lambda_h u_i^h$$

pour $i = 1, \dots, N$ avec $u_0^h = u_{N+1}^h = 0$. Ceci peut s'écrire sous forme algébrique $A_h U_h = \lambda_h U_h$, où A_h est une matrice carrée $N \times N$, et U_h un vecteur de \mathbb{R}^N . Pour déterminer la plus grande valeur propre de A_h , on pourrait utiliser par exemple la méthode de la puissance. Le nombre de valeurs propres inférieures à la plus grande valeur propre de A_h est alors simplement N .

La démarche numérique qu'on vient de décrire semble tout à fait raisonnable. Cependant, elle n'est pas si simple à mettre en œuvre pour vérifier la formule de Weyl. En effet, les valeurs λ_h ne sont que des *approximations* des valeurs propres du moins-Laplacien, et ces approximations sont d'autant plus mauvaises, à h fixé, que la valeur propre cherchée est grande. Calculer la plus grande valeur propre de A_h ne donne donc qu'une approximation très pauvre de la valeur propre λ_N . Il vaut mieux observer le comportement des valeurs propres de A_h d'indices beaucoup plus petits que N . Mais comme le but est *in fine* d'étudier de grandes valeurs propres, le coût du calcul peut devenir rapidement prohibitif.

Suggestions pour le développement

- *Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pouvez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre, et de façon plus ou moins fouillée. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées plus bas. Il est très vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats.*

- Établir la Proposition 1. On pourra commencer par montrer que

$$\|v(\cdot, t) - v_K(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq 2 \left(\sum_{k=K+1}^{+\infty} \frac{|g_k|^2}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2} \right)^{1/2}.$$

- Vérifier la formule de Weyl dans le cas où Ω est un hypercube en dimension d .
- Étudier à l'aide d'un logiciel de calcul numérique les propriétés d'approximation de la méthode modale. On pourra la comparer à une méthode de différences finies.
- Présenter des simulations en faisant varier les paramètres du problème. Commenter par exemple la situation où ω est voisin d'un ω_k .
- Illustrer numériquement les difficultés évoquées à la fin du texte.
- Présenter des méthodes de calcul de valeurs propres d'une matrice et illustrer les de façon pertinente dans le cadre du texte.