

(B92)

Résumé : On s'intéresse à un modèle simplifié qui exhibe les difficultés essentielles posées par les équations de la dynamique des gaz.

Mots clefs : Equations aux dérivées partielles. Equation de transport. Différences finies

- *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.*

1. Introduction

On considère l'évolution de "particules" dans un fluide. Pour simplifier on supposera que ces particules ne peuvent se déplacer que sur une droite. On note $P(t; s, x)$ la position occupée à l'instant t par une particule partie à l'instant s de la position x . Connaissant le champ de vitesses u en tout point, l'évolution de la particule est donc régie par

$$\frac{d}{dt}P(t; s, x) = u(t, P(t; s, x)), \quad P(s; s, x) = x.$$

On désigne par $\rho(t, x)$ la densité de ces particules c'est-à-dire que $\int_a^b \rho(t, x) dx$ donne le nombre de particules contenues à l'instant t dans le domaine (a, b) . On a alors la propriété de conservation

$$\int_{P(t; 0, a)}^{P(t; 0, b)} \rho(t, x) dx = \int_a^b \rho(0, x) dx.$$

On en déduit que

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0.$$

Toutefois dans les applications, le champ de vitesses u n'est pas donné mais satisfait une certaine équation d'évolution qui implique elle-même ρ . On est donc confronté à des systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires.

Dans ce texte, on s'intéresse à deux versions de ce problème :

- la première consiste en un simple modèle linéaire où la vitesse est constante $u(t, x) = c \in \mathbb{R}$;
- pour la seconde, on supposera que la vitesse est liée à la densité par $u = \rho$ (en particulier plus la densité est élevée plus les particules vont vite).

(B92) Option Calcul scientifique

On considère donc l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} f(\rho) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

avec $f(\rho) = c\rho$ ou $f(\rho) = \rho^2$, complétée par la donnée initiale $\rho(0, x) = \rho_0(x)$. Ces équations contiennent en fait l'essentiel des difficultés des modèles réalistes de la dynamique des gaz. Nous allons étudier quelques unes de ces difficultés, tant sur le plan de l'analyse mathématique que de la simulation numérique.

2. Préliminaires mathématiques

Un point de vue fécond consiste à introduire, sans se préoccuper dans un premier temps d'éventuelles difficultés techniques liées à leur existence, les courbes caractéristiques associées à (1) qui sont solutions de l'EDO

$$\frac{d}{dt} X(t; s, x) = f'(\rho(t, X(t; s, x))), \quad X(s; s, x) = x.$$

On interprète alors (1) comme une propriété de conservation le long de ces courbes

$$\frac{d}{dt} (\rho(t, X(t; s, x))) = 0.$$

Dans le cas linéaire $f(\rho) = c\rho$, les caractéristiques sont de simples droites $X(t; s, x) = x + c(t - s)$ et la solution de (1) est dans ce cas $\rho(t, x) = \rho_0(x - ct)$. En mimant cette démarche pour $f(\rho) = \rho^2$ on s'aperçoit que la situation est bien plus compliquée. Les courbes caractéristiques sont alors définies par

$$\frac{d}{dt} X(t; s, x) = 2\rho(t, X(t; s, x)), \quad X(s; s, x) = x.$$

La relation donnant la solution de (1) en fonction de la donnée initiale $\rho(t, x) = \rho_0(X(0; t, x))$ devient une relation implicite puisque la définition de X dépend encore de ρ ! Cette approche permet cependant de mettre en évidence un premier phénomène intéressant. Un argument simple montre que, même si on considère une donnée ρ_0 très régulière, la solution de (1) peut perdre cette régularité en temps fini et qu'on ne peut alors plus résoudre l'EDO définissant les courbes caractéristiques. En effet, en dérivant (1), on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho \right) + 2\rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho \right) = -2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho \right)^2.$$

Autrement dit, on se rend compte que $t \mapsto \frac{\partial}{\partial x} \rho(t, X(t; 0, x))$ vérifie l'équation de Riccati $y' = -2y^2$. Ainsi, lorsque ρ_0 est décroissante, la solution de (1) est telle que $\frac{\partial}{\partial x} \rho(t, x)$ prend des valeurs infinies en temps fini. Il s'agit là d'un phénomène de *choc*, illustré par la figure 1.

Cette remarque conduit à introduire une notion de solution plus sophistiquée qui permet d'envisager de telles discontinuités, mais cette notion va au delà du propos de ce texte ; nous allons dans la suite plutôt nous intéresser à l'approximation numérique de cette équation. On cherchera en particulier à évaluer les performances de différents schémas pour la donnée initiale

(B92) Option Calcul scientifique

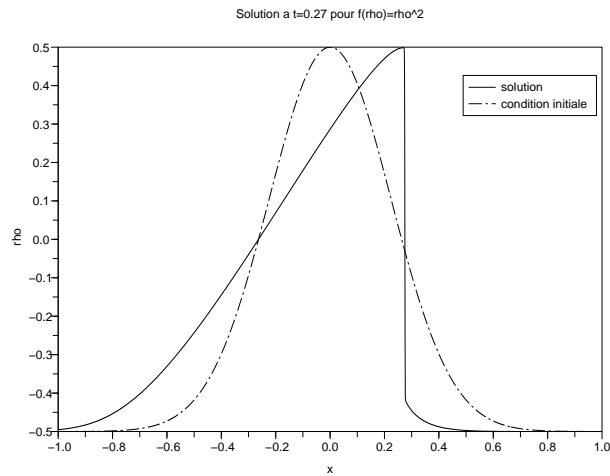


FIG. 1

$\rho_0(x) = \mathbf{1}_{x \leq 0}$ où $\mathbf{1}_A$ désigne la fonction caractéristique de l'ensemble A : on cherche à retrouver la solution donnée par la figure 2.

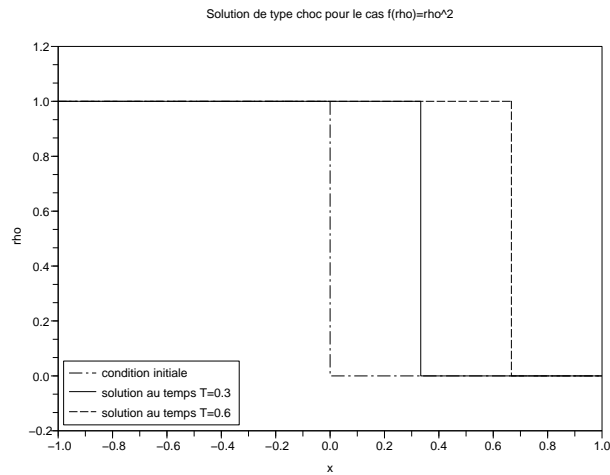


FIG. 2

Auparavant, il est aussi intéressant de comparer (1) avec l'équation obtenue en ajoutant un terme de viscosité

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho_\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x} f(\rho_\varepsilon) = \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho_\varepsilon,$$

(B92) Option Calcul scientifique

où $\varepsilon > 0$. Cette équation peut être résolue explicitement à l'aide d'un changement d'inconnue astucieux. Pour le cas linéaire $f(\rho) = c\rho$, on obtient

$$\rho_\varepsilon(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-ct-y)^2}{4\varepsilon t}\right) \rho_0(y) \frac{dy}{\sqrt{4\pi\varepsilon t}}$$

et on peut établir la convergence de ρ_ε vers ρ , solution de (1) quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Pour le cas non linéaire $f(\rho) = \rho^2$, on remarque que $v(t, x) = \exp(-\frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^x \rho_\varepsilon(t, y) dy)$ vérifie l'équation de la chaleur $\frac{\partial}{\partial t} v = \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} v$. On obtient donc

$$\rho_\varepsilon(t, x) = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \ln \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4\varepsilon t}\right) v_0(y) \frac{dy}{\sqrt{4\pi\varepsilon t}} \right], \quad v_0(x) = \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^x \rho_0(y) dy\right).$$

Cette expression indique en particulier que la solution de (2) est une fonction très régulière. Une analyse très délicate établit la convergence de la suite ρ_ε vers la solution de (1).

3. Simulation numérique

Une première approche pour résoudre numériquement (1) consiste à envisager un schéma d'Euler explicite vis-à-vis de la variable de temps, combiné à une méthode de différences finies pour la variable d'espace

$$(3) \quad \rho_j^{n+1} - \rho_j^n = -\frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(\rho_{j+1}^n) - f(\rho_{j-1}^n))$$

Ce schéma ne fonctionne pas, y compris pour le modèle linéaire : la figure 3 est typique d'un défaut de stabilité.

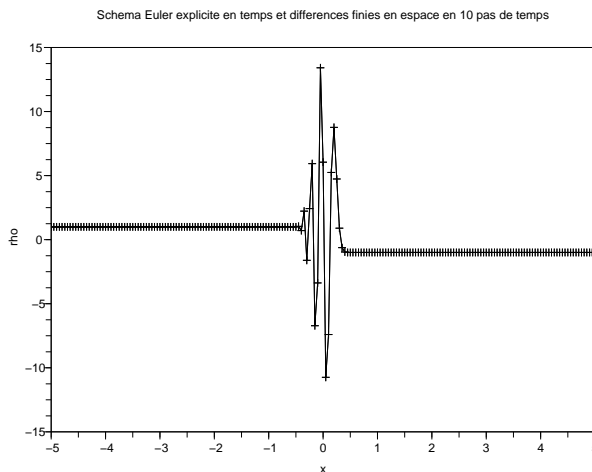


FIG. 3

Pour illustrer cette notion on introduit la

Définition 1. On envisage un schéma numérique pour (1) comme une relation de récurrence entre des suites : étant donné $(\rho_j^0)_{j \in \mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$, on pose $\rho_j^{n+1} = \Phi(\rho_{j+1}^n, \rho_j^n, \rho_{j-1}^n)$. On introduit la suite de fonctions définie par

$$\rho^n(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \rho_j^n \mathbb{1}_{((j-1/2)\Delta x, (j+1/2)\Delta x)}(x).$$

On dit que le schéma est L^2 -stable si et seulement si $\|\rho^{n+1}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|\rho^n\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

En exploitant $\|\rho^{n+1}\|_{L^2(\mathbb{R})} = C \|\widehat{\rho^{n+1}}\|_{L^2(\mathbb{R})}$, où $\widehat{\cdot}$ désigne la transformée de Fourier, on montre que le schéma (3) pour $f(\rho) = c\rho$ n'est pas stable. L'idée consiste alors à introduire un terme de viscosité dans l'équation : au lieu de résoudre (1), on l'approche par (2) avec ε dépendant des pas de temps Δt et d'espace Δx . Plus précisément, on pose $\varepsilon = (\Delta x)^2 / (2\Delta t)$ fixé et on approche l'équation (2) correspondante par différences finies. On obtient le schéma

$$(4) \quad \rho_j^{n+1} = \frac{\rho_{j+1}^n + \rho_{j-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(\rho_{j+1}^n) - f(\rho_{j-1}^n)).$$

On peut vérifier dans le cas linéaire que ce schéma est L^2 -stable sous la condition $|c|\Delta t / \Delta x \leq 1$.

Evidemment la mise en oeuvre numérique de cet algorithme nécessite de préciser des conditions aux limites ; pour simplifier on considère des conditions de 1-périodicité en espace c'est-à-dire qu'on impose, si $j \in \{0, \dots, J\}$ avec $J\Delta x = 1$, $\rho_{J+1}^n = \rho_0^n$ et $\rho_{-1}^n = \rho_J^n$. La figure 4 illustre cette méthode.

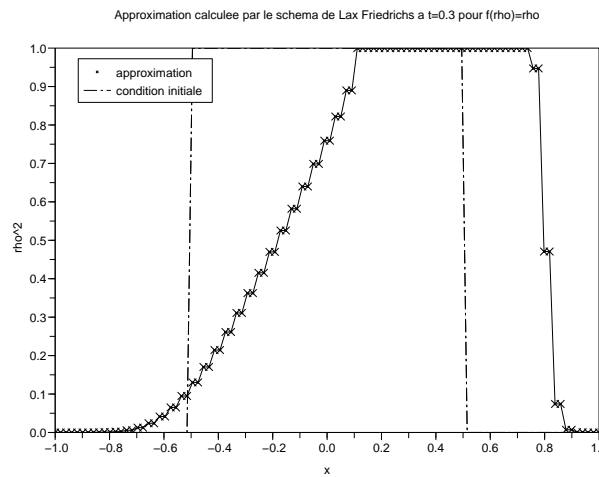


FIG. 4

Suggestions pour le développement

- Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pouvez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre, et de façon plus ou moins

(B92) Option Calcul scientifique

fouillée. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées plus bas. Il est très vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats.

- On pourra détailler certains arguments mathématiques qui ne sont que brièvement esquissés dans le texte : explosion de $\frac{\partial}{\partial x}\rho$, résolution des équations avec viscosité, convergence dans le cas linéaire, étude de stabilité...
- Discuter et illustrer les comportements des différents schémas proposés.
- On pourra présenter d'autres méthodes numériques. Par exemple, tester un schéma décentré en espace.