SCILAB À l'AGREGATION DE MATHEMATIQUES

1. L'épreuve orale de modélisation

2. Séances d'introduction à Scilab

3. Exemples d'illustrations pédagogiques

(dont 7 scripts)

4. Exemples d'illustrations thématiques

(dont 4 scripts)

1. L'EPREUVE ORALE DE MODELISATION

1.1 Déroulement (textes officiels)

Durée de la préparation: quatre heures.
Durée de l'épreuve: une heure.
Coefficient: 1

L'épreuve porte sur un programme commun aux deux options et sur un programme spécifique à chacune d'elles. Elle comporte:

Soit l'illustration d'une technique de modélisation mathématique: le candidat doit exposer un résultat du programme et l'illustrer dans un des thèmes applicatifs du programme (à savoir pour la session 2000: dynamique des populations, cinétique chimique, géométrie effective et appliquée, contrôle de qualité et fiabilité, modèles mathématiques en économie et finance). L'utilisation de l'ordinateur est particulièrement appréciée. Au cours de l'entretien qui suit, le candidat peut se voir proposé un exercice de modélisation.

Soit l'utilisation d'un texte de modélisation mathématique relevant des thèmes applicatifs du programme: le candidat peut avoir à faire la synthèse du texte proposé, à montrer sa maîtrise technique en détaillant la signification et le schéma de preuve d'un résultat de ce texte, à en montrer l'exploitation dans une séquence pédagogique. Cette séquence pédagogique peut faire usage d'une illustration à l'aide de l'ordinateur.

Le choix entre ces deux formules d'une même épreuve appartient au candidat qui l'indique au jury. Pour la préparation, le candidat dispose de documents fournis par le jury, et peut utiliser ses propres ouvrages s'ils sont autorisés.

Le jury intervient à son gré au cours de l'épreuve et conduit le dialogue avec le candidat.

1.2 Extraits du programme officiel

Programme commun

Les logiciels Maple et Matlab ou Scilab en version étudiante doivent être connus et utilisés couramment par les candidats (*une toolbox probas/stat spéciale est également disponible NDLR*)

Simplification et représentation des rationnnels, des fractions rationnelles.

Résolution d'équations algébriques.

Utilisation pour l'intégration, la différentiation, le calcul de sommes, la résolution d'équations différentielles.

Calcul numérique d'intégrales (méthode de Gauss en dimension 1).

Systèmes linéaires d'équations: factorisation LU, algorithmes de Gauss-Seidel et du gradient conjugué pour les systèmes linéaires symétriques définis positifs.

Systèmes non linéaires d'équations: méthode de Newton.

Recherche de valeurs propres: la méthode de Jacobi.

Partie optionnelle calcul scientifique

Le programme comprend les méthodes de calcul et les algorithmes cités dans les programmes des épreuves écrites et celles et ceux cités dans les paragraphes suivants. Ces méthodes pourront donner lieu à une illustration sur machine dans un cadre numérique ou symbolique, selon le cas.

Les candidats devront pouvoir montrer leur capacité:

(i) à distinguer les représentations exactes ou approchées des objets mathématiques manipulés;

(ii) à évaluer le coût et les limitations des algorithmes: complexité, croissance des coefficients, précision numérique;

(iii) à choisir les outils en fonction du contexte et des objectifs de l'étude et des fondements mathématiques qui ont conduit à leur développement.

1.3 Liste des leçons de l'option calcul scientifique

1. Recherche des valeurs propres et des vecteurs propres d'une matrice
2. Exemple de résolution exacte ou approchée d'un système d'équations linéaires.
3. Résultant et élimination effective dans les systèmes d'équations polynomiales.
4. Proposez une méthode de résolution approchée d'équation ou de système d'équations numériques non linéaires.
5. Donnez un résultat relatif à l'approximation ou l'interpolation de fonctions.
6. Décrivez une méthode probabiliste ou déterministe pour le calcul approché d'une intégrale.
7. Décrivez une méthode de résolution exacte ou approchée d'équation différentielles ou de systèmes d'équations différentielles.
8. Exemple de propriétés qualitatives d'une équation différentielle ou d'un système d'équations différentielles. Interprétation sur un modèle.
9. Étude des solutions d'une équation ou d'un système d'équations différentielles autonomes: trajectoires, comportement au voisinage d'un point fixe.
10. Exemple de résolution exacte ou approchée d'une équation aux dérivées partielles.
11. Exemple de propriétés qualitatives d'une équation aux dérivées partielles. Interprétation sur un modèle.
12. Démontrez un résultat relatif au conditionnement ou à la stabilité d'un problème issu des thèmes applicatifs de cette année.
13. Minimisation d'une fonction de n variables réelles ou d'une fonctionnelle.
14. Justifiez par une application un résultat d'analyse de Fourier.

1.4 Raport du jury pour la session 1999

Plus de la moitié des candidats a fourni une illustration sur machine (à partir de cette année, celle-ci est obligatoire, à savoir qu'elle sera prise en compte dans l'évaluation). L'usage de l'ordinateur a montré qu'il était possible de réaliser des simulations à la fois pertinentes et relativement simples. La virtuosité n'était en rien indispensable. Il reste néanmoins deux points sur lesquels des efforts doivent être portés:

- les thèmes du programme n'ont pas assez été exploités.

- la notion de modélisation a semblé très peu claire pour bon nombre de candidats.

Si le travail d'illustration sur machine a été justement récompensé, le jury a mis de fort mauvaises notes aux virtuoses de l'ordinateur qui ne comprenaient rien aux mathématiques.

2. SEANCES D'INTRODUCTION

2.1 Fonctionnement général

Scilab est un logiciel de calcul scientifique disponible gratuitement sur le site Internet de l'INRIA (`www-rocq.inria.fr/scilab`). Il sera donc utilisé pour la résolution approchée d'équations différentielles, d'équations aux dérivées partielles ou de systèmes non linéaires toujours de façon complémentaire au logiciel Maple réalisant pour sa part des calculs formels exacts.

Comme Matlab, Scilab utilise un langage propre, proche dans sa structure des langages informatiques courants (Fortran, C, Pascal) et possède en outre un grand nombre d'algorithmes pré programmées ainsi qu'une aide en ligne bien documentée.

2.2 Structure des données mathématiques

Instruction	Description
`a=2`	affectation de la valeur réelle 2 à `a`
`a=%t`	affectation du booléen *vrai* à `a`
`p=poly([%i -%i],'z')`	affectation du polynôme $(z-i)(z+i)=z^2+1$ à `p`
`z=poly(0,'z');`	
`q=1+3*z+4.5*z^2`	affectation du polynôme $1+3z+4.5z^2$ à `q`
`r=p/q`	affectation d'une fraction rationnelle à `r`
`A=[a+1 2; atan(1) -3]`	affectation d'une matrice réelle 2×2 à `A`
`rand(3,3,'u')`	matrice aléatoire 3×3 (loi uniforme sur $[0,1]$)
`rand(3,3,'n')`	matrice aléatoire 3×3 (loi gausienne centrée)
`eye(4,4)`	matrice identité $I_4 \in \mathcal{M}_4(\mathbf{R})$
`ones(1,2);1:2:7`	vecteurs lignes $(1,1)$ et $(1,3,5,7)$
`B=toeplitz([4 1 0 0])`	matrice tridiagonale symétrique dans $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$
`C=B'*B`	calcul de $C={}^tBB$ (matrice 4×4)
`D=C.*B`	multiplication terme à terme de `C` par `B`
`f=C(1:4,1)` ou `f=C(:,1)`	extraction des termes de la première colonne de `C`
`g=`D`\f`	divsion à droite de `D` par `f` (Dg=f)
`deff('y=f(a,b)','y=a+b')`	définition de la fonction f(a,b)=a+b

2.3 Algorithmes préprogrammés

Instruction	Description
`fsolve(a,f)`	recherche des zéros d'une fonction `f` autour de `a`
`intg(a,b,f)`	calcul de l'intégrale d'une fonction `f` entre `a` et `b`
`fft(a,-1)`	transformation de Fourier rapide du vecteur `a`
`ode(y0,t0,t,f)`	résolution de l'équation `y'=f(t,x), y(t0)=y0`
`linsolve(A,b)`	résolution du système linéaire `Au=b`
`cond(A)`	conditionnement d'une matrice (norme euclidienne)
`det(A)`	déterminant d'une matrice
`rank(A)`	rang d'une matrice
`inv(A)`	inverse d'une matrice
`pinv(A)`	pseudo inverse d'une matrice
`svd(A)`	valeurs singulières d'une matrice

2.4 Syntaxe du langage

Instruction	Description
`mode(i)`	mode d'exécution (`i=0`: normal)
`pause`	pause dans une exécution
`resume`	reprise d'une exécution
`if .. then .. elseif .. end`	instruction conditionnelle
`for i=1:2:10 .. end`	boucle ($i = 1, 3, 5, 7, 9$)
`while .. end`	boucle conditionnelle
`read(%io(1),m,n)`	entrée au clavier d'une matrice $m \times n$.
`write(%io(2),'string')`	écriture de `string` sur l'écran

2.5 Représentation graphique

Instruction	Description
`plot2d(x,y)`	tracé de la courbe passant par les points `(x,y)`
`plot2d1('oll',x,y)`	idem avec échelle logarithmique sur les deux axes
`fplot2d(x,f)`	tracé de la courbe `(x,f(x))`
`champ(x,y,fx,fy)`	tracé du champ de vecteurs `(fx(x,y),fy(x,y))`
`plot3d(x,y,z)`	tracé de la surface passant par les points `(x,y,z)`
`param3d(x,y,z)`	tracé de la courbe paramétrée passant en `(x,y,z)`
`contour(x,y,z,n)`	tracé de `n` courbes de niveau d'une surface
`histplot(n,data)`	histogramme de l'échantillon `data`
`xbasc()`	effacement des fenêtres graphiques
`xset()`	modification des options graphiques
`xsetech([x1,y1,x2,y2])`	découpage d'une fenêtre graphique
`xstring(x,y,'abc')`	inscription de caractères sur une figure

3. EXEMPLES D'ILLUSTRATIONS PEDAGOGIQUES

3.1 Résolution des systèmes non linéaires

- **Script 1**: la méthode de la sécante.

3.2 Interpolation polynômiale

- **Script 2**: le phénomène de Runge

3.3 Calcul d'intégrales

- **Script 3**: comparaison de la méthodes des trapèzes et de Monte Carlo.

3.4 Résolution des équations différentielles

- **Script 4**: le mouvement d'un pendule simple

3.5 Résolution des systèmes linéaires

- **Script 5**: calcul de l'inverse d'une matrice par la méthode de Gauss

3.6 Résolution des équations aux dérivées partielles

- **Script 6**: le problème de Dirichlet

3.7 Probabilités (programme commun)

- **Script 7**: le théorème central limite

4. EXEMPLES D'ILLUSTRATIONS THEMATIQUES

4.1 Exemple 1

Thème: dynamique des populations (modèles proies-prédateurs)

On suppose que deux espèces sont en présence sur un même territoire, une famille de prédateurs (en nombre u dans toute la suite) et une famille de proies (en nombre v). On suppose que les proies en l'absence de prédateurs prolifèrent, que les prédateurs en l'absence de proies s'éteignent et enfin que les proies sont captées par les prédateurs avec un taux fixe.

`Question 1`: en supposant que la répartition spatiale des deux populations est homogène, proposer un modèle simple d'évolution de u et v en fonction du temps et étudier les propriétés qualitatives des solutions de celui-ci.

`Question 2`: on a remarqué qu'au terme de la seconde guerre mondiale, le nombre de requins avait augmenté. Justifier ce phénomène à la lumière du présent modèle.

Problème voisin:

Cinétique chimique: évolution d'un modèle à deux espèces.

Leçons associées: 7, 8 et 9.

Références:

[Mur] "Mathematical biology": J.D. Murray; Biomathematics texts, Springer Verlag, 1993.

[LBL] "Calculus with applications and computing vol.1": P. Lax, S. Burstein, A. Lax; Springer, 176.

[Ma] "Développements à l'oral d'analyse": K. Madère; Ellipses, 1997.

4.1.1 Exemple 1: modélisation

On propose le modèle d'évolution suivant dû à Volterra (voir [Mur]):

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = au(t)v(t) - bu(t), \quad t \in \mathbf{R}_+, \\ \dfrac{dv}{dt}(t) = -cu(t)v(t) + dv(t), \\ u(0) = u_0, \\ v(0) = v_0. \end{cases}$$

a et b sont des constantes positives et correspondent respectivement au taux de croissance des prédateurs par capture des proies et à leur taux de mortalité propre. De même, c et d représentent le taux de disparition des proies par capture et leur taux de prolifération.

Le problème précédent peut se ramener, après dilatation de l'échelle de temps et normalisation, au problème générique suivant (sans changement de notations):

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = \alpha u(t)(v(t) - 1), \quad t \in \mathbf{R}_+, \\ \dfrac{dv}{dt}(t) = v(t)(1 - u(t)), \\ u(0) = u_0, \\ v(0) = v_0 \end{cases} \tag{1}$$

où $\alpha \in \mathbf{R}_+$.

4.1.2 Exemple 1: simulation numérique

La simulation du système (1) est aisément réalisée avec le logiciel Scilab (voir Script 8 correspondant aux paramètres $(\alpha, u_0, v_0) = (\frac{1}{2}, 2, 2)$).

4.1.3 Exemple 1: étude mathématique

On remarque que toute solution (u,v) du système (1) telle que $u \neq 1$ et $v \neq 0$ à tout instant, vérifie:

$$\frac{du}{dv} = \alpha \frac{u(v-1)}{v(1-u)}$$

puis après intégration

$$\alpha v + u - \ln(v^{\alpha} u) = \alpha v_0 + u_0 - \ln(v_0^{\alpha} u_0).$$

À partir de cette observation, on démontre (voir [Ma]) le caractère périodique du système et le fait que de faibles valeurs de u_0 et v_0 engendrent au cours du temps des valeurs éventuellement élevées de u et v (instabilité du point fixe $(0,0)$).

De plus, on montre que les valeurs moyennes de u et v sont indépendantes des valeurs initiales et sont égales respectivement à $\frac{d}{c}$ et $\frac{b}{a}$ pour le modèle avant normalisation. Ainsi, un prédateur extérieur provoque une diminution du nombre moyen de prédateurs (car sa présence revient à rajouter un terme $-Ku(t)$ et $-Kv(t)$ dans chaque second membre et les nouvelles valeurs moyennes valent alors $\frac{d-K}{c}$ et $\frac{b+K}{a}$). Cette dernière propriété permet en particulier de répondre à la question 2 en invoquant la diminution de la pêche (donc des prédateurs extérieurs) au cours de la seconde guerre mondiale.

4.2 Exemple 2

Thème: dynamique des populations (modèles proies-prédateurs)

On conserve les mêmes propriétés comportementales pour la famille de proies et de prédateurs que précédemment. On rajoute à ce modèle un effet de surpopulation limitant la croissance des proies et on suppose en outre que les deux familles se déplacent (en diffusant) dans un espace à une dimension.

`Question 3`: proposer un modèle simple d'évolution de la répartition spatiale de u et v en fonction du temps et étudier les propriétés qualitatives des solutions de celui-ci.

`Question 4`: on observe parfois dans un milieu aquatique, le déplacement de bandes de plancton. Justifier ce phénomène à la lumière du présent modèle.

Problème voisin:

Dynamique des populations: propagation de la rage.

Leçons associées: 2, 10 et 11.

Références:

[Mur] "Mathematical biology": J.D. Murray; Biomathematics texts, Springer Verlag, 1993.

4.2.1 Exemple 2: modélisation

On propose le modèle d'évolution suivant dû à Dunbar (voir [Mur]):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = a'u(t,x)v(t,x) - b'u(t,x) + D_1 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \quad (t,x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(t,x) = -c'u(t,x)v(t,x) + d'v(t,x)(1 - \dfrac{v(t,x)}{k'}) + D_2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x), \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{R} \\ v(0,x) = v_0(x). \end{cases}$$

Les constantes positives a', b', c' et d' ont la même interprétation que leurs homologues a, b, c et d pour le modèle de Volterra. Par rapport à celui-ci, un effet de surpopulation pour la famille de proies a été rajouté et est représenté par le terme $-d'\dfrac{v^2}{k'}$. De plus, D_1 et D_2 désignent les coefficients de diffusion associés au déplacement des deux familles.

Après normalisation, le système précédent peut se réduire à l'étude du système générique suivant:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \beta u(t,x)(v(t,x) - \mu) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \quad (t,x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(t,x) = v(t,x)(1 - u(t,x) - v(t,x)) + D \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x), \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{R} \\ v(0,x) = v_0(x) \end{cases} \tag{2}$$

où $(\beta, \mu, D) \in \mathbf{R}_+ \times [0,1] \times \mathbf{R}_+$.

4.2.2 Exemple 2: étude mathématique

On s'intéresse ici au système (2) avec $D = 0$ (les proies ne diffusent pas dans l'espace).

On remarque tout d'abord que les points d'équilibre de ce système sont au nombre de trois. On montre en particulier aisément que deux sont instables: $(u, v) = (0, 0)$ et $(u, v) = (0, 1)$ et qu'un est stable: $(u, v) = (1 - \mu, \mu)$.

Afin de rechercher des solutions de (2) sous la forme de profils d'onde se déplaçant à vitesse constante, on effectue alors le changement de variable $z = x + ct$ ($c \in \mathbf{R}$) dans (2) et on cherche des solutions u et v pouvant s'écrire $u(t, x) = U(z)$ et $v(t, x) = V(z)$. Les fonctions U et V doivent nécessairement vérifier le système différentiel ordinaire suivant

$$\begin{cases} cU'(z) = \beta U(V - \mu) + U''(z), \\ cV'(z) = V(1 - U - V), \end{cases} \qquad z \in \mathbf{R}.$$

On peut montrer que ce système possède une unique solution avec les conditions aux limites $U(-\infty) = 0$, $V(-\infty) = 1$, $U(+\infty) = 1 - \mu$, $V(+\infty) = \mu$. De plus, cette solution reste positive si et seulement si $c \geq \sqrt{4\beta(1 - \mu)}$ et le front d'onde a un profil monotone si $\beta > \beta^*$ (β^* est une valeur critique pouvant être calculée analytiquement).

4.2.3 Exemple 2: simulation numérique

La simulation numérique de l'exemple 2 est basée sur la décomposition du second membre des EDP de (2). En notant respectivement δ et $h = L/(N-1)$ les pas de discrétisation en temps et en espace et $(u_j^n)_{1\le j\le N, n\in\mathbf{N}}$ et $(v_j^n)_{1\le j\le N, n\in\mathbf{N}}$ les valeurs approchées de u et v sur la grille $(t_n, x_j) = (n\delta, (j-1)h)$, on construit un schéma en deux étapes. La première étape consiste à effectuer une méthode d'Euler (voir leçon A.V.) pour la première partie du second membre:

$$\begin{cases} u_j^{n+\frac{1}{2}} = u_j^n + \delta\beta u_j^n(v_j^n - \mu), \\ v_j^{n+\frac{1}{2}} = v_j^n + \delta v_j^n(1 - u_j^n - v_j^n), \end{cases} \qquad 1 \le j \le N,\ n \in \mathbf{N}.$$

La deuxième étape prend en compte le terme de diffusion du second membre en utilisant un schéma aux différences finies implicite:

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = u_j^{n+\frac{1}{2}} + \dfrac{\delta}{h^2}(u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}), \\ v_j^{n+1} = v_j^{n+\frac{1}{2}} + D\dfrac{\delta}{h^2}(v_{j-1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j+1}^{n+1}), \end{cases} \qquad 2 \le j \le N-1,\ n \in \mathbf{N},$$

avec de plus $u_1^{n+1} = u_2^{n+1}$ et $u_{N-1}^{n+1} = u_N^{n+1}$ (et idem pour v). On effectue également un recentrage de la solution de telle sorte que le point X_n défini par l'égalité $v(t_n, X_n) = \dfrac{1+\mu}{2}$ soit toujours au centre du domaine de calcul (on suppose en outre que u et v ont convergé à l'extrémité translatée). On prend pour données initiales

$$u_0^j = \begin{cases} 0 \quad \text{si } 1 \le j \le \dfrac{N}{2}, \\ 1-\mu \quad \text{si } \dfrac{N}{2} < j \le N, \end{cases} \qquad \text{et} \quad v_0^j = \begin{cases} 1 \quad \text{si } 1 \le j \le \dfrac{N}{2}, \\ \mu \quad \text{si } \dfrac{N}{2} < j \le N, \end{cases}$$

et des valeurs $(\beta, \mu, D) = (0.4, 0.6, 0)$.

4.3 Exemple 3

Thème: dynamique des populations (modèles proies-prédateurs)

On suppose à présent que les proies sont captées avec un taux constant et que les deux familles se déplacent librement sur une droite (à vitesse constante) lorsqu'elles ne sont pas en présence l'une de l'autre.

`Question 5`: proposer un modèle simple d'évolution de la répartition spatiale de u et v et étudier les propriétés qualitatives des solutions de celui-ci.

Leçons associées: 2, 10 et 11.

Références:

[Mur] "Mathematical biology": J.D. Murray; Biomathematics texts, Springer Verlag, 1993.

[Has] "Exact solution of certain migration predation problem": H. Hasimoto; Proc. Japan Acad., 1974.

4.3.1 Exemple 3: modélisation

On propose le modèle d'évolution suivant dû à Yamaguti:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) + c_1 \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x) = \lambda_1 u(t,x) v(t,x), \quad (t,x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(t,x) + c_2 \dfrac{\partial v}{\partial x}(t,x) = -\lambda_2 u(t,x) v(t,x), \\ u(0,x) = u_0(x),, \quad x \in \mathbf{R} \\ v(0,x) = v_0(x). \end{cases} \tag{3}$$

c_1 et c_2 désignent respectivement les vitesses de déplacement libre des prédateurs et des proies alors que les coefficients positifs λ_1 et λ_2 correspondent comme précédemment au taux de croissance pour les prédateurs (respectivement de disparition pour les proies) associé à la capture des proies.

4.3.2 Exemple 3: simulation numérique

La simulation numérique de l'exemple 3 a été réalisée avec le logiciel Scilab. Le schéma utilisé est classique pour les équations de convection (schéma décentré) et peut s'écrire (avec les mêmes notations que pour l'exemple 2)

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = u_j^n - c_1 \dfrac{\delta}{h}(u_j^n - u_{j-1}^n) + \lambda_1 \delta u_j^n v_j^n, & 2 \leq j \leq N,\ n \in \mathbf{N}, \\ v_j^{n+1} = v_j^n - c_2 \dfrac{\delta}{h}(v_{j+1}^n - v_j^n) + \lambda_2 \delta u_j^n v_j^n, & 1 \leq j \leq N-1,\ n \in \mathbf{N}, \end{cases}$$

avec la convention $u_1^n = u_N^n$ et $v_N^n = v_1^n$ (hypothèse de périodicité).

Le schéma pour u et v doit être décentré dans les deux sens indiqués si on suppose que $c_1 > 0$ et $c_2 < 0$. De plus, pour qu'il soit stable, il faut imposer une condition de type CFL sur le pas de temps à savoir $|c_i|\dfrac{\delta}{h} < 1$ $(i = 1, 2)$.

On considère les données initiales périodiques suivantes:

$$\begin{cases} u_0^j = \dfrac{3}{2} + \sin(2\pi(\dfrac{j-1}{N-1})), \\ v_0^j = 4 + 2\cos(2\pi(\dfrac{j-1}{N-1})), \end{cases} \quad 1 \leq j \leq N,$$

et les valeurs des paramètres $(c_1, c_2, \lambda_1, \lambda_2) = (1, -1, 25, -25)$.

4.3.3 Exemple 3: étude mathématique

Il est possible de déterminer une expression analytique des solutions u et v (voir [Has]) permettant ensuite d'établir plusieurs résultats qualitatifs confirmant les observations effectuées dans les simulations numériques:

(i) Si u_0 et v_0 sont bornées et si u_0 ne possède pas 0 comme valeur d'adhérence, alors u est bornée et v tend vers 0.

(ii) Si u_0 et v_0 sont périodiques, de même période l, alors u et v demeurent périodiques en espace et u est asymptotiquement périodique en temps (de période l) lorsque t tend vers $+\infty$.

4.4 Exemple 4

Thème: contrôle de qualité et fiabilité

On désire vérifier la qualité de pièces rectangulaires produites industriellement. Pour cela, on prélève de la chaine de fabrication divers exemplaires de celles-ci et on vérifie (par des techniques de mesure de coordonnées de points) si elles entrent dans les normes.

Leçons associées: 1, 2 et 13.

Référence

[GH] "Solving problems in scientific computing using Maple and Matlab": W. Gander, Jiři Hřebiček, Springer-Verlag, 1993.

4.4.1 Exemple 4: modélisation

On note (n_1, n_2, n_3, n_4) le nombre de points de mesure pour chacune des quatre familles et $(x_i^j, y_i^j)_{1\leq j\leq 4, 1\leq i\leq n_j}$ l'ensemble de leurs coordonnées. On cherche à déterminer le meilleur rectangle (au sens des moindres carrés) associé à ces quatre familles. En écrivant l'équation d'une droite sous la forme $c + n_1 x + n_2 y = 0$ avec $n_1^2 + n_2^2 = 1$, on se ramène ainsi à déterminer les six inconnues du problème $u =^t (c_1, c_2, c_3, c_4, n_1, n_2) \in \mathbf{R}^6$ (tel que $n_1^2 + n_2^2 = 1$) en minimisant $||Au||_2^2$ où $A \in \mathcal{M}_{n,6}$ $(n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4)$ vérifie:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & & x_1^1 & y_1^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & x_{n_1}^1 & y_{n_1}^1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & -y_1^2 & x_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & -y_{n_2}^2 & x_{n_2}^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & x_1^3 & y_1^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & x_{n_3}^3 & y_{n_3}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & -y_1^4 & x_1^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & -y_{n^4}^4 & x_{n_4}^4 \end{pmatrix}.$$

À partir de la factorisation $A = QR$ de la matrice, on se ramène donc à minimiser $||Ru||_2^2$ avec R=$\begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $R_1 \in TS_6(\mathbf{R})$. Les valeurs $N = (n_1, n_2)$ sont alors solution du problème de minimisation

$$\min\{|| \begin{pmatrix} r_{5,5} & r_{5,6} \\ 0 & r_{6,6} \end{pmatrix} N||_2, \quad ||N||_2 = 1\}$$

et correspondent donc au vecteur associé à la plus petite valeur singulière de la matrice triangulaire 2×2. Enfin $C = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ s'obtient en résolvant le système triangulaire

$$\begin{pmatrix} r_{1,1} & \dots & r_{1,4} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & r_{4,4} \end{pmatrix} C = - \begin{pmatrix} r_{1,5} & r_{1,6} \\ \vdots & \vdots \\ r_{4,5} & r_{4,6} \end{pmatrix} N$$

4.5 Autres exemples

Elasticité: calcul des modes de vibration d'une poutre ([Fo], leçon 4).

Elasticité: déformation d'une membrane ([DaLi], leçons 2, 10, 11).

Mécanique des fluides: modèles de viscosité ([Fo], leçon 4).

Mécanique des fluides: écoulement autour d'un profil d'aile ([LuPi], leçons 10, 11).

Mécanique des fluides: méthode Monte Carlo pour les écoulements à haute altitude ([LPS]).

Mécanique du point: problème du pendule pesant (leçons 7, 8, 9).

Mécanique céleste: problème des trois corps soumis à l'attraction gravitationnelle ([GH], leçons 7, 8, 9).

Cinématique: chien poursuivant un jogger ([GH], leçons 7,8,9).

Balistique: pénétration d'un objet dans une cible ([GH], leçons 7, 8, 9, 14).

Acoustique: équation des ondes dans un hall aux murs absorbants ([LuPi], leçons 10, 11).

Thermique: conduction thermique dans une plaque ([LuPi], leçons 2, 10, 11).

Trafic routier: éclairage homogène d'une route ([GH], leçons 4, 13).

Trafic routier: interpolation de la vitesse d'un véhicule ([Fo], leçon 5).

Ingénierie: courbe des puissances classées d'un service d'électricité ([Fo], leçon 5).

Traitement d'image: interpolation bilinéaire ou bicubique (aide Matlab, leçon 5).

Traitement du signal: filtres régularisants ([GH], leçon 5, 13).

Traitement du signal: lissage d'une fonction par transformation de Fourier ([DaLi], leçons 6 et 14).

Géométrie effective: courbes et surfaces de Bézier ([Bez], leçon 5).

4.6 Bibliographie

[LuPi] “Introduction au calcul scientifique”: B. Lucquin, O. Pironneau; Mathématiques appliquées pour la maîtrise, Masson, 1996.

[DaLi] “Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques” (9 tomes): R. Dautray, J.L. Lions; Collection CEA, Masson, 1987.

[Fo]“Analyse numérique pour ingénieurs”: A. Fortin; École Polytechnique de Montréal.

[Bez] “Courbes et surfaces: mathématiques et CAO”: P. Bézier; Hermès, 1986.

[LPS] “Méthodes de Monte Carlo et équation de transport”: B. Lapeyre, E. Pardoux, R. Sentis; Mathématiques et applications, Springer Verlag, 1998.

Voir aussi (infos, liens, scripts, etc...):

`http://www.dmi.ens.fr/ ldumas/agreg.html`